

## Διδακτικό Σενάριο

### 1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

**Δημιουργός:** Κωνσταντίνος Μαλλιάρκας

**Θεματική του διδακτικού σεναρίου:** Ευκλείδεια Γεωμετρία – Παραλληλόγραμμα

**Βαθμίδα – Τάξη:** 15-16 ετών / Α' Λυκείου

**Προτεινόμενες Διδακτικές ώρες:** Τρεις (3)

#### Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα

Οι μαθητές θα πρέπει:

- Να ορίζουν και να διακρίνουν τα τετράπλευρα σε κυρτά και μη κυρτά.
- Να ορίζουν, να αναγνωρίζουν και να ταξινομούν τα τετράπλευρα σε παραλληλόγραμμα και μη.
- Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες και τα κριτήρια του παραλληλογράμμου και να διακρίνουν ποιες από αυτές το χαρακτηρίζουν.
- Να αποδεικνύουν αν ένα τετράπλευρο είναι ή δεν είναι παραλληλόγραμμο με βάση δεδομένες πληροφορίες για τις πλευρές και τις γωνίες τους.
- Να κάνουν χρήση του ορισμού και των κριτηρίων προκειμένου να σχεδιάσουν παραλληλόγραμμα που θα διατηρούν αναλλοίωτες τις ιδιότητες τους μετά από δυναμική μεταβολή στοιχείων τους είτε σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας είτε κάνοντας χρήση γεωμετρικών οργάνων.
- Να αποκτήσουν την ικανότητα να κατανοούν, να κρίνουν, να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν ορθά τα μαθηματικά σε μια ποικιλία μαθηματικών πλαισίων και καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο και έτσι να λειτουργήσουν κριτικά.

#### Προαπαιτούμενες δυνατότητες μαθητών (γνωστικές και κοινωνικοπολιτισμικές)

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν έρθει σε επαφή με έννοιες σχετικές με την έννοια του παραλληλογράμμου, όπου διερεύνησαν είδη τετράπλευρων, διατύπωσαν ορισμούς και τα ταξινόμησαν με βάση τις ιδιότητες τους. Επίσης χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα και ψηφιακά εργαλεία διατύπωσαν εικασίες σχετικές με τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και σχεδίασαν παραλληλόγραμμα. Γνωρίζουν επίσης τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Επίσης στην Α' Λυκείου έχουν προηγηθεί οι παρακάτω ενότητες με αντίστοιχα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα:

- Σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία.
- Άθροισμα γωνιών κυρτών πολυγώνων.
- Κριτήρια ισότητας τριγώνων.

## 2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ

### Περί μαθητή και μάθησης

Όπως και με οποιαδήποτε άλλη μαθηματική έννοια, έτσι και με τις έννοιες του γεωμετρικού χώρου και στην συγκεκριμένη περίπτωση με την έννοια του παραλληλογράμμου έχει σημασία η διδασκαλία να ξεκινά και να εξελίσσεται με έναυσμα από τον πραγματικό κόσμο με στόχο την ανάδειξη της διαισθητικής άποψης των παιδιών. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ως δεδομένο ότι η μαθηματική /γεωμετρική σκέψη των παιδιών εξελίσσεται σε διαδοχικά επίπεδα (επίπεδα Γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele) η διδασκαλία του παραλληλογράμμου στο έργο αυτό προσαρμόζεται και ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

- Η οπτικοποίηση/ διάκριση του παραλληλογράμμου μέσα από μια ολότητα κυρτών τετράπλευρων και η αναγνώριση/ περιγραφή του, πιθανά με περιορισμένο γεωμετρικό λεξιλόγιο.
- Η αναγνώριση των συστατικών στοιχείων του παραλληλογράμμου, η περιγραφή των ιδιοτήτων τους με σταδιακή ανάπτυξη του κατάλληλου λεξιλογίου. Η διερεύνηση των παιδιών σε αυτό το βήμα έχει κυρίως εμπειρικό χαρακτήρα χωρίς υποχρεωτικά να προβαίνουν σε τυπικούς ορισμούς και λογικές αποδείξεις.
- Η λογική διάταξη των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων, η αποσαφήνιση του ρόλου του ορισμού και των κριτηρίων σε αντιπαράθεση με τις ιδιότητες του. Σε αυτό το βήμα αντικείμενο έρευνας γίνονται οι ίδιες οι σχέσεις πλευρών, γωνιών, διαγώνιων και πως αυτές χαρακτηρίζουν ή όχι το τετράπλευρο ως παραλληλόγραμμο.
- Η αναπαγωγή ή σύνθεση αποδείξεων, η χρήση λογικών συλλογισμών, η ανακάλυψη σχέσεων και η συναγωγή γενικεύσεων (ορισμένες Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών). Στο βήμα αυτό επικαλείται ο μαθητής το ρόλο του ορισμού και των κριτηρίων ως οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να χαρακτηριστεί ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο και να αξιοποιήσει τις κατάλληλες αποδεικτικές μεθόδους.
- Οι αφηρημένοι συλλογισμοί, η ευρύτερη εφαρμογή των όσων αποδειχτήκαν στα προηγούμενα βήματα σε πραγματικά προβλήματα στα οποία οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν παραλληλόγραμμο και να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους πάνω σε αυτά ή ακόμα και να μπουν στη λογική των γεωμετρικών κατασκευών στις οποίες οι γνώσεις αυτές αποτελούν αναπόσπαστο στοιχείο.

Ειδικότερα οι βασικές δυσκολίες των μαθητών και τα κρίσιμα σημεία, σύμφωνα με έρευνες, τα οποία αναμένεται να αντιμετωπιστούν είναι:

- Η διάκριση μεταξύ ορισμού, ιδιοτήτων και κριτηρίων παραλληλογράμμων.
- Η λανθασμένη αντίληψη ότι η διαγώνιος παραλληλογράμμου είναι και διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας.
- Η σωστή λεκτική διατύπωση ιδιοτήτων και κριτηρίων.
- Η αυστηρή απόδειξη ιδιοτήτων και κριτηρίων.
- Η εύρεση κατάλληλων διαδικασιών κατασκευής παραλληλογράμμων με κανόνα και διαβήτη με χρήση όλων των κριτηρίων.

**Χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας που επιδιώκεται να αναδειχθούν κατά την ενασχόληση των μαθητών με καθένα από τα συγκεκριμένα έργα.**

- Η ουσία αυτής της διδακτικής πρότασης είναι η εκπαίδευση στην χρήση των κριτηρίων ως εργαλεία για τον εντοπισμό παραλληλόγραμμων και όχι η στείρα απομνημόνευση και αναπαραγωγή αυτών σε θεωρητικό επίπεδο. Μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες καλούνται να εντοπίσουν τις διαφορές κριτηρίων και ιδιοτήτων πειραματιζόμενοι είτε με χειραπτικό υλικό, είτε με κατασκευές στο χαρτί είτε με δυναμικά τετράπλευρα, μέσω των οποίων γίνεται διάκριση του γεωμετρικού σχεδίου (**εικόνα**) από το γεωμετρικό σχήμα (**κλάση σχεδίων** με κοινά χαρακτηριστικά) και οπτικοποιούνται οι λανθασμένες αντιλήψεις, ένα από τα κρίσιμα σημεία της διδασκαλίας.
- Η ορθή λεκτική διατύπωση ορισμών ,ιδιοτήτων και κριτηρίων προκύπτει σε αυτή τη φάση και είναι δυνατόν να επιτευχθεί από όλους τους μαθητές γεγονός που αναπτύσσει την αυτοπεποίθηση και δημιουργεί θετικά κίνητρα για τη συνέχεια.
- Οι μαθητές καλούνται συνεργατικά να θεμελιώσουν τους συλλογισμούς τους βασιζόμενοι σε ήδη γνωστές προτάσεις (κριτήρια ισότητας τριγώνων, άθροισμα γωνιών κυρτού πολυγώνου, σχέσεις γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία), να διερευνήσουν τις επιλογές και τα συμπεράσματα τους, να ερμηνεύσουν και να τροποποιήσουν τις επιλογές τους ελέγχοντας και επαναξιολογώντας όσες φορές χρειάζεται την κάθε τους κίνηση.
- Το πέρασμα από τις γεωμετρικές σχέσεις σε επίλυση προβλήματος με πραγματικό υπόβαθρο προκαλεί το ενδιαφέρον και επιτυγχάνεται μέσω δραστηριότητας δυναμικού χαρακτήρα. Έτσι έρχονται σε επαφή με τρόπους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα παραλληλόγραμμα, αξιοποιώντας τις ιδιότητες τους και τα κριτήρια, ώστε να αποκτήσουν ένα επιπλέον εφόδιο στα πλαίσια του μαθηματικού εγγραμματισμού τους.

## **Διδακτικές ενέργειες – Διδακτικές πρακτικές**

### **Ο ρόλος του εκπαιδευτικού**

Ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει την πορεία της διδασκαλίας και ως ενορχηστρωτής της όλης διαδικασίας φροντίζει μαζί με το φύλλο εργασίας να δώσει τις πρώτες απαραίτητες πρακτικές οδηγίες (π.χ. χρήση λογισμικού ή χειραπτικού υλικού) να διευκολύνει και να μεσολαβήσει ώστε οι ομάδες και ο ρόλος του κάθε παιδιού σε αυτήν να οριστούν αρμονικά και με συναίνεση των συμμετεχόντων.

Σε αυτήν την πρώτη φάση της οργάνωσης επεξηγεί τον τρόπο δράσης και προτρέπει τους μαθητές να ακολουθήσουν τις οδηγίες του φύλλου εργασίας.

Στη συνέχεια παρακολουθεί διακριτικά τις εργασίες των μαθητών, καταγράφει πρακτικές και συμπεριφορές κινούμενος από ομάδα σε ομάδα και απαντάει σε ερωτήσεις που τίθενται χωρίς να υποδεικνύει λύσεις αλλά φροντίζοντας να δημιουργήσει ένα υποστηρικτικό περιβάλλον μάθησης στο οποίο οι ίδιοι οι μαθητές μέσα από τον πειραματισμό και τις διαλογικές αντιπαραθέσεις, θα αναθεωρούν, θα αξιολογούν, θα κρίνουν και τελικά θα λαμβάνουν αποφάσεις και θα απαντούν στα ίδια τους τα ερωτήματα.

Συντονίζει το διάλογο μεταξύ των ομάδων ενώ ταυτόχρονα μπορεί να αξιοποιεί τα «λάθη» ή τις πρωτότυπες ιδέες των μαθητών ώστε να θέτει επιπλέον ερωτήσεις,

επιδιώκοντας την διασύνδεση και ενσωμάτωση της νέας γνώσης με τις προϋπάρχουσες ή να κάνει επεκτάσεις που θα προετοιμάζουν το έδαφος για τη μετέπειτα γνώση.

Ενθαρρύνει την ενεργό εμπλοκή όλων των μαθητών είτε στις ατομικές είτε στις ομαδικές δραστηριότητες αξιοποιώντας τις αρχές της παιδαγωγικής ψυχολογίας και την πρακτική των πολλαπλών προσεγγίσεων και αφουγκράζεται τις ανησυχίες των μαθητών που μπορεί να σχετίζονται με κοινωνικές ή πολιτισμικές διαφοροποιήσεις προτείνοντας αλλαγές ρόλων ή δίνοντας εναλλακτικές στην ομάδα σε μια λογική αυτορρύθμισης της.

Στο τελικό στάδιο της αξιολόγησης φροντίζει να αναδεικνύει την όποια προσπάθεια ακόμα και των πιο αδύναμων μαθητών, να δίνει την απαραίτητη ανατροφοδότηση αποφεύγοντας την κατηγοριοποίηση των μαθητών, να επιβραβεύει την συμμετοχή και την συνεργασία και να επικροτεί την πρόοδο και όχι απαραίτητα την αριστεία.

### **Ο ρόλος των μαθητών**

Σε κάποιες δραστηριότητες η τάξη μπορεί να είναι χωρισμένη σε 4 ή 5 ομάδες των 4 ή 5 ατόμων, οι ρόλοι των οποίων διαμορφώνονται με επιλογή των συμμετεχόντων. Ένα από τα παιδιά της κάθε ομάδας χειρίζεται τον υπολογιστή και τα αρχεία Geogebra, δύο από αυτά ασχολούνται με τις δραστηριότητες στο χαρτί με κανόνα και διαβήτη και οι άλλοι δύο με το χειραπτικό υλικό (χαρτόνια για κοπή ή δίπλωση και διερεύνηση της ισότητας τριγώνων με μετατόπιση, εφαρμογή και ταύτιση).

Εναλλακτικά, μπορεί μία ή δύο ομάδες να δουλεύουν με το Geogebra με ένα χειριστή που εναλλάσσεται και με συνεργασία για τις ενέργειες και τα συμπεράσματα τους, μία ή δύο ομάδες να δουλεύουν όλοι με χαρτί, κανόνα και διαβήτη ή και άλλα γεωμετρικά όργανα όπως γνώμονας και μοιρογνωμόνιο για μετρήσεις και δημιουργία εικασιών και μια ομάδα με το χειραπτικό υλικό.

Το φύλλο εργασίας δίνεται σε όλους και συμπληρώνεται μετά από συζήτηση και αλληλεπίδραση των διαφοροποιημένων προσεγγίσεων.

Στο τέλος κάθε Έργου οι ομάδες καλούνται να συγκρίνουν τα αποτελέσματα τους στοιχειοθετώντας τα συμπεράσματα τους.

Ανατίθεται επίσης ως ατομική εργασία για το σπίτι ένα σύνολο Έργων από το σχολικό εγχειρίδιο ή οποιοδήποτε άλλο πόρο.

### **Διαχείριση του δυναμικού της τάξης**

Στα συγκεκριμένα έργα, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες και καλούνται σε ατομικό και ομαδικό επίπεδο να βρουν ή ανακαλύψουν:

- είτε τρόπο να υπολογίσουν το ζητούμενο κάνοντας μια σειρά από σχεδιασμούς
- είτε τρόπο να συγκρίνουν σχήματα και τις αντίστοιχες ιδιότητες τους, εφαρμόζοντας κατάλληλη μέθοδο (ισότητα τριγώνων, ταύτιση κτλ.)
- είτε να δημιουργήσουν και να υποστηρίξουν δικές τους μεθόδους, αν επιλέξουν να εργαστούν διερευνητικά εκτός τυποποιημένου πλαισίου με επιπλέον εργαλεία (π.χ. δοκιμές).
- Να συνεργαστούν σεβόμενοι την άποψη των άλλων, να συζητήσουν και να καταλήξουν σε ένα κοινό κείμενο.
- Να επισημάνουν ό,τι θεωρούν σημαντικό περιγράφοντας τις μεθόδους που ακολούθησαν (αυτό αποτελεί και υποβοηθητικό στοιχείο για την παρατήρηση διεργασιών και συμπερασμάτων από τον εκπαιδευτικό).

Στις ομάδες εργασίας, οι μαθητές επεξεργάζονται το πρόβλημα και συζητούν μεθόδους αντιμετώπισής του, με διάλογο και επιχειρηματολογία.

Οι δραστηριότητες αφορούν:

- α) στην αναγνώριση των ζητούμενων του προβλήματος,
- β) στην επιλογή μεθόδου,
- γ) στην διεκπεραίωση των απαραίτητων σχεδιασμών,
- δ) στον έλεγχο της εγκυρότητας του αποτελέσματος και στην αντίστοιχη ανάληψη διορθωτικών πρωτοβουλιών, εάν χρειάζεται.

### **Διαχείριση πρακτικών παραμέτρων (όπως ο χρόνος και οι υλικοτεχνικές υποδομές)**

Το σενάριο μπορεί να υλοποιηθεί είτε στο Εργαστήριο Πληροφορικής είτε σε σχολική αίθουσα. Όσον αφορά τη διαχείριση του χώρου, οι ομάδες είναι τοποθετημένες έτσι ώστε να έχουν καλή οπτική επαφή με την οθόνη του υπολογιστή όσοι δουλεύουν με Geogebra και να έχουν άνεση χώρου όσοι δουλεύουν με γεωμετρικά όργανα ή χειραπτικό υλικό.

Όσον αφορά στον καταμερισμό του χρόνου, την 1<sup>η</sup> διδακτική ώρα θα υλοποιηθεί το μέρος της εισαγωγής και τα έργα 1, 2, τη 2<sup>η</sup> διδακτική ώρα προτείνουμε να υλοποιηθούν τα Έργα 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 και την 3<sup>η</sup> διδακτική ώρα προτείνουμε να ακολουθήσει η τελική αξιολόγηση με τα Έργα 10 και 11, η συζήτηση στην ολομέλεια και η ανατροφοδότηση.

### 3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

**Αξιολόγηση για τη μάθηση και την ανατροφοδότηση του διδακτικού έργου και πώς θα ελεγχθεί και διαπιστωθεί τι κατάφερε κάθε μαθητής αλλά και η τάξη συλλογικά.**

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας θα γίνεται αξιολόγηση των μαθητών με βάση το φύλλο εργασίας, τη συνεργασία και την επικοινωνία μεταξύ των μελών της ομάδας αλλά και της ολομέλειας κατά τη συζήτηση για τα αποτελέσματα των μαθηματικών δραστηριοτήτων που ανέπτυξαν κατά τη διάρκεια ενασχόλησης με τα Έργα.

Μετά τη διδασκαλία της 3ης διδακτικής ώρας θα ακολουθήσει και μια τελική αξιολόγηση.

- Για το διδακτικό έργο: Πώς θα ελεγχθεί / διαπιστωθεί αν οι διδακτικές επιλογές ήταν επιτυχείς ή αναποτελεσματικές;

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του διδακτικού έργου και για τον έλεγχο ως προς την εγκυρότητα του και την βέλτιστη επιλογή μεθόδων ο εκπαιδευτικός στην πορεία της διδασκαλίας παρατηρεί και καταγράφει εάν:

- Οι μαθητές συσχετίζουν τα αποτελέσματα με όσα έχουν διδαχθεί.
- Οι μαθητές συσχετίζουν, αποτιμώντας, συμπεράσματα για μεγέθη ως προς την εγκυρότητα και τη συνέπειά τους.
- Εντοπίζει και διορθώνει σφάλματα με αυτονομία ή, σε συνάφεια και με τα πιο πάνω, δέχεται τον ορθολογισμό της επαλήθευσης όταν βασίζεται σε εγκαθιδρυμένη γνώση που επικαλούνται οι συμμαθητές ή ο εκπαιδευτικός.
- Αιτιολογεί τις μεθοδολογικές/επιλυτικές επιλογές που έκανε.
- Εκφράζει λεκτικά την πορεία επίλυσης που εκτέλεσε.
- Μπορεί να διδάξει την όλη πορεία επίλυσης στους συμμαθητές του.

Επιπλέον με την ολοκλήρωση της τρίωρης διδασκαλίας οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν το παρακάτω φύλλο αυτοαξιολόγησης.

|    | ΚΡΙΤΗΡΙΑ                                                                                             | ΚΑΘΟΛΟΥ | ΛΙΓΟ | ΑΡΚΕΤΑ | ΠΟΛΥ |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------|--------|------|
| 1  | Κατάφερα να διατυπώσω λεκτικά τα ζητούμενα.                                                          |         |      |        |      |
| 2  | Μπόρεσα να εντοπίσω την κατάλληλη ιδιότητα παραλληλογράμμου.                                         |         |      |        |      |
| 3  | Εφάρμοσα σωστά τα κριτήρια στα έργα.                                                                 |         |      |        |      |
| 4  | Κατάφερα να διακρίνω την διαφορά των ιδιοτήτων παραλληλογράμμου από τα κριτήρια για παραλληλόγραμμο. |         |      |        |      |
| 5  | Αξιοποίησα τη «νέα γνώση» για την επίλυση του προβλήματος ή την κατασκευή.                           |         |      |        |      |
| 6  | Αντιμετώπισα προβλήματα στο σχεδιασμό στο χαρτί των ζητούμενων κάποιων έργων.                        |         |      |        |      |
| 7  | Αντιμετώπισα προβλήματα στο χειρισμό του λογισμικού.                                                 |         |      |        |      |
| 8  | Αντιμετώπισα προβλήματα στο χειρισμό του χειραπτικού υλικού.                                         |         |      |        |      |
| 9  | Οι οδηγίες που μου δίνονταν ήταν σαφείς και κατανοητές.                                              |         |      |        |      |
| 10 | Συμμετείχα στην ομάδα ενεργά.                                                                        |         |      |        |      |
| 11 | Η ομάδα με βοήθησε να αντιληφθώ λάθος επιλογές και να τις διορθώσω.                                  |         |      |        |      |
| 12 | Η συμμετοχή μου στην ομάδα βοήθησε κάποιους συμμαθητές μου να κατανοήσουν και να βελτιωθούν.         |         |      |        |      |
| 13 | Συμμετέχοντας στην ομάδα κατανόησα καλύτερα την έννοια του παραλληλογράμμου.                         |         |      |        |      |
| 14 | Ο καθηγητής μου με ενθάρρυνε στη χρήση εργαλείων που μου ανατέθηκαν.                                 |         |      |        |      |
| 15 | Ο καθηγητής μου ήταν βοηθητικός στην επίλυση των προβλημάτων που αντιμετώπισα.                       |         |      |        |      |

#### 4.ΑΝΑΣΤΟΧΑΣΜΟΣ

- **Για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας:**

Με δεδομένο ότι ο σχεδιασμός της διδασκαλίας στα μαθηματικά έργα έγινε στο πλαίσιο των πολλαπλών σημείων εισόδου, με κλιμακούμενο βαθμό δυσκολίας και με την δυνατότητα διαφορετικών προσεγγίσεων που μπορούν να αναπτύξουν οι μαθητές στο ίδιο έργο (ψηφιακό εργαλείο, χάραξη σχημάτων με γεωμετρικά όργανα, χρήση χειραπτικού υλικού) θα πρέπει από τον εκπαιδευτικό (και πιθανά από κάποιον έτερο έμπειρο παρατηρητή) να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

- Τα έργα απευθύνονταν σε όλους τους μαθητές και αν ναι, τους έδωσαν την δυνατότητα να επιτύχουν σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό τους στόχους των δραστηριοτήτων;
- Η χρήση του λογισμικού είτε ατομικά είτε συνεργατικά στα πλαίσια των ομάδων προσέλυσε και διατήρησε σε ικανοποιητικό επίπεδο την προσοχή ακόμα και των συνήθως αδιάφορων μαθητών κεντρίζοντας την περιέργειά τους, προκαλώντας και προωθώντας την άμιλλα;
- Υπήρχε εξοικείωση με τον χειρισμό του λογισμικού, βασική προϋπόθεση ώστε η διδασκαλία να διεξάγεται χωρίς καθυστερήσεις, ή είναι απαραίτητο να αφιερώνεται χρόνος πριν από την διδασκαλία για εξάσκηση πάνω στο λογισμικό;
- Ήταν αποτελεσματική η χρήση κοινωνικοπολιτισμικών εργαλείων, όπως η γλώσσα, τα σύμβολα, τα κείμενα;
- Η χρήση του χειραπτικού υλικού ήταν χρήσιμη, απαραίτητη ή βοηθητική και σε ποια από τα έργα λειτούργησε θετικά στην οπτικοποίηση και κατανόηση των ζητούμενων;
- Η παρουσίαση των οδηγιών ήταν κατανοητή από τους μαθητές;
- Η εργασία σε ομάδες βοήθησε ώστε να ξεπεραστούν σημεία όπου υπήρξαν απορίες;

- **Για την μαθησιακή διαδικασία:**

Σε συμφωνία και συνέχεια του παραπάνω σχεδιασμού ερωτήματα που μπορούν να απασχολήσουν τον διδάσκοντα όσον αφορά την μαθησιακή διαδικασία είναι:

- Η άμεση και σε κάποιες περιπτώσεις διορθωτική ανάδραση που προσφέρει το λογισμικό είχε σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να ανακαλύπτουν μόνοι τους και συνεπώς να συνειδητοποιούν τα λάθη τους αλλά και να εμπλέκονται σε διαδικασίες προβληματισμού προκειμένου να οδηγηθούν στην σωστή κατεύθυνση;
- Ο ρόλος του διδάσκοντα περιορίστηκε σε βοηθητικός με συχνές ερωτήσεις για παροχή ανατροφοδότησης και έλεγχο της μαθησιακής διαδικασίας;
- Σε συζήτηση-ερωτήσεις που ακολούθησε τις διδασκαλίες οι μαθητές απάντησαν με σαφείς αναφορές σε δραστηριότητες που τους ανατέθηκαν και σε ποιο ποσοστό το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι πρακτική ενασχόληση, η εικόνα και η διάδραση βοηθάει στο να αποτυπώνονται στην μνήμη πιο εύκολα ορισμοί και συμπεράσματα;
- Η έλλειψη πειθαρχίας είναι επίσης ένας παράγοντας που επηρεάζει την ποιότητα της διδασκαλίας στο εργαστήριο πολύ περισσότερο από ότι στην τάξη. Συνεπώς μήπως η διδασκαλία στο εργαστήριο απαιτεί μικρό πλήθος μαθητών (πιθανά όχι μεγαλύτερο των δέκα ατόμων) ώστε να εξασφαλίζεται η χρήση του λογισμικού χωρίς προβλήματα και ο έλεγχος από τον διδάσκοντα να είναι επαρκής και αποτελεσματικός;



- **Για την διδακτική προσέγγιση:**

- Παρατηρήθηκε αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών;
- Θεώρησαν ότι το μάθημα έγινε ελκυστικότερο;
- Τα λάθη των παιδιών που στοχευμένα αντιμετωπίστηκαν ως το αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής διαδικασίας αποτέλεσαν εφελκυστικό κατανόησης του μαθηματικού περιεχόμενου από τα ίδια τα παιδιά;
- Λανθασμένοι σχεδιασμοί στο χαρτί ή παρανοήσεις και ελλιπής εφαρμογή των κριτηρίων αποτέλεσαν σημεία προβληματισμού και επανεξέτασης των μεθόδων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές προσεγγίζοντας το ζητούμενο με ποικίλους τρόπους γεγονός που οδήγησε στην ουσιαστική κατανόηση;
- Με δεδομένο ότι η ανατροφοδότηση από συνομηλίκους έχει μια σειρά από πλεονεκτήματα για τους μαθητές που παρέχουν την ανατροφοδότηση όσο και για εκείνους που τη λαμβάνουν, η εργασία σε ομάδες οδήγησε σε διαδικασίες αναστοχασμού για τη μάθηση και ενίσχυση της κατανόησης των μαθητών για τη δική τους μάθηση; (μεταγνώση)
- Η χρήση των νέων τεχνολογιών κατά την διδακτική διαδικασία δημιουργεί ιδιαιτερότητες και απαιτεί ευέλικτα διδακτικά σχήματα και τεχνικές. Με βάση αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι η ποικιλία των προσεγγίσεων που επιλέχθηκε κρίνεται θετικά όσον αφορά την τελική επίτευξη των διδακτικών στόχων;

- **Για την ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού και της πρακτικής του (επαγγελματική ανάπτυξη):**

Μετά το τέλος της διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός καλείται:

- Να αξιολογήσει τα μαθηματικά έργα που χρησιμοποίησε, πώς αυτά δημιούργησαν την αντίστοιχη μαθηματική δραστηριότητα και αν αυτή κατόρθωσε να αναδείξει τα «χρήσιμα» μαθηματικά.
- Να διακρίνει τα χαρακτηριστικά των ψηφιακών εργαλείων τα οποία τα κατέστησαν χρήσιμα στην αξιοποίηση τους στη διδακτική πράξη.
- Να διακρίνει τα χαρακτηριστικά του χειραπτικού υλικού τα οποία το κατέστησαν χρήσιμο στην αξιοποίηση του στη διδακτική πράξη.
- Να επιχειρηματολογήσει πώς η κάθε προσέγγιση ή το κάθε έργο (με ή χωρίς την αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων ή χειραπτικού υλικού) και η αντίστοιχη δραστηριότητα, βοήθησε στην κατασκευή νοημάτων με εναλλακτικούς τρόπους και γιατί ήταν σημαντική η ποικιλία των προσεγγίσεων.
- Να επιχειρηματολογήσει πώς η κάθε προσέγγιση ή το κάθε έργο (με ή χωρίς την αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων ή χειραπτικού υλικού) βοήθησε στο σχεδιασμό περιβάλλοντος μάθησης που προτείνονται από το Πρόγραμμα Σπουδών - ατομικής οικοδόμησης της γνώσης, διερευνητικής/ ανακαλυπτικής μάθησης, επίλυσης προβλήματος, συμμετοχικής/ συνεργατικής μάθησης.
- Να προβληματιστεί με μη αναμενόμενα περιστατικά απαντώντας σε ερωτήσεις τύπου «τι νέο προέκυψε» και να δώσει εναλλακτικές τρόπους προσέγγισης.
- Να προβληματιστεί ή και να επαναπροσδιορίσει στρατηγικές συμπερίληψης και διαφοροποίησης, προσαρμόζοντας τα μαθηματικά έργα στις προηγούμενες γνώσεις τις εμπειρίες την κουλτούρα και τον ρυθμό που μαθαίνουν οι μαθητές, εάν κρίνει ότι αυτές δεν απέδωσαν.
- Να βελτιώσει, να αναθεωρήσει και να επαναλάβει την διδασκαλία με βάση τα στοιχεία που έχει συλλέξει.

## **Διαδικασία – Πορεία Διδασκαλίας**

### **1<sup>η</sup> Διδακτική ώρα: Εισαγωγή**

**Δίνονται συνοπτικές πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του Ευκλείδη και πηγές-ιστοσελίδες για όσους ενδιαφέρονται να το ερευνήσουν περισσότερο.**

**Ευκλείδης** (άκμασε περίπου το 300 π.Χ., Αλεξάνδρεια, Αίγυπτος):

Ο πιο εξέχων μαθηματικός της ελληνορωμαϊκής αρχαιότητας, γνωστός για την πραγματεία του για τη γεωμετρία, τα Στοιχεία (13 βιβλία). Ο Ευκλείδης κατάλαβε ότι η οικοδόμηση μιας λογικής και αυστηρής γεωμετρίας (και μαθηματικών) εξαρτάται από τα θεμέλια. Ο Ευκλείδης ξεκίνησε στο Βιβλίο Ι με 23 ορισμούς (όπως «σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος» και «μια γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος»), πέντε αναπόδεικτες υποθέσεις που ο Ευκλείδης ονόμασε αξιώματα και πέντε περαιτέρω αναπόδεικτες υποθέσεις που ονόμασε κοινές έννοιες.

#### **Τα αξιώματα του Ευκλείδη**

- 1 Δεδομένων δύο σημείων υπάρχει μία ευθεία που τα ενώνει.
- 2 Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να παραταθεί επ' αόριστον.
- 3 Ένας κύκλος μπορεί να κατασκευαστεί όταν δίνεται ένα σημείο για το κέντρο του και μια απόσταση για την ακτίνα του.
- 4 Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.
- 5 Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες, τότε οι δύο ευθείες, τέμνονται σε εκείνο το ημιεπίπεδο στο οποίο οι γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες.

#### **Κοινές έννοιες του Ευκλείδη**

- 6 Πράγματα ίσα με το ίδιο πράγμα είναι ίσα.
- 7 Αν προστεθούν ίσα σε ίσα, τα σύνολα είναι ίσα.
- 8 Αν τα ίσα αφαιρεθούν από τα ίσα, τα υπόλοιπα είναι ίσα.
- 9 Τα πράγματα που συμπίπτουν μεταξύ τους είναι ίσα.
- 10 Το όλο είναι μεγαλύτερο από ένα μέρος.

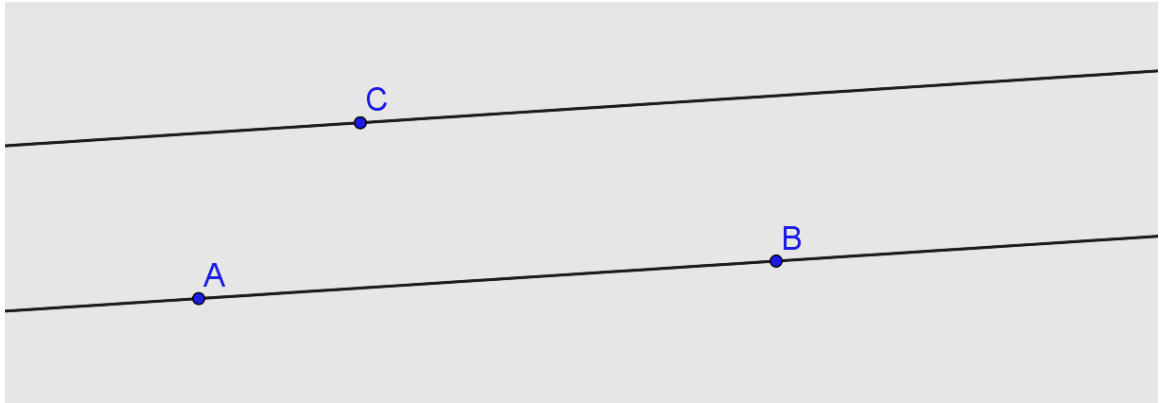
#### **Το 5ο αξίωμα και μερικές από τις συνέπειές του**

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία, ουσιαστικά ξεκινά από αυτό το σημείο, γιατί αφού ο Ευκλείδης απαίτησε να γίνει αποδεκτό το 5ο Αξίωμα χωρίς απόδειξη, πολλά άλλα θεωρήματα αποδείχθηκαν χρησιμοποιώντας αυτό άμεσα ή έμμεσα και έχτισε τη Γεωμετρία του. Υπάρχουν και άλλες Γεωμετρίες που δεν δέχτηκαν το 5ο αξίωμα αλλά αποδέχτηκαν ένα άλλο αξίωμα αντί για αυτό όπως έκανε ο Ευκλείδης. Τις ονομάζουμε μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και απέδειξαν πολύ διαφορετικά θεωρήματα από τα Θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

- Διατυπώνουμε δύο εκδοχές του 5<sup>ου</sup> αξιώματος και το περιγράφουμε γραφικά.

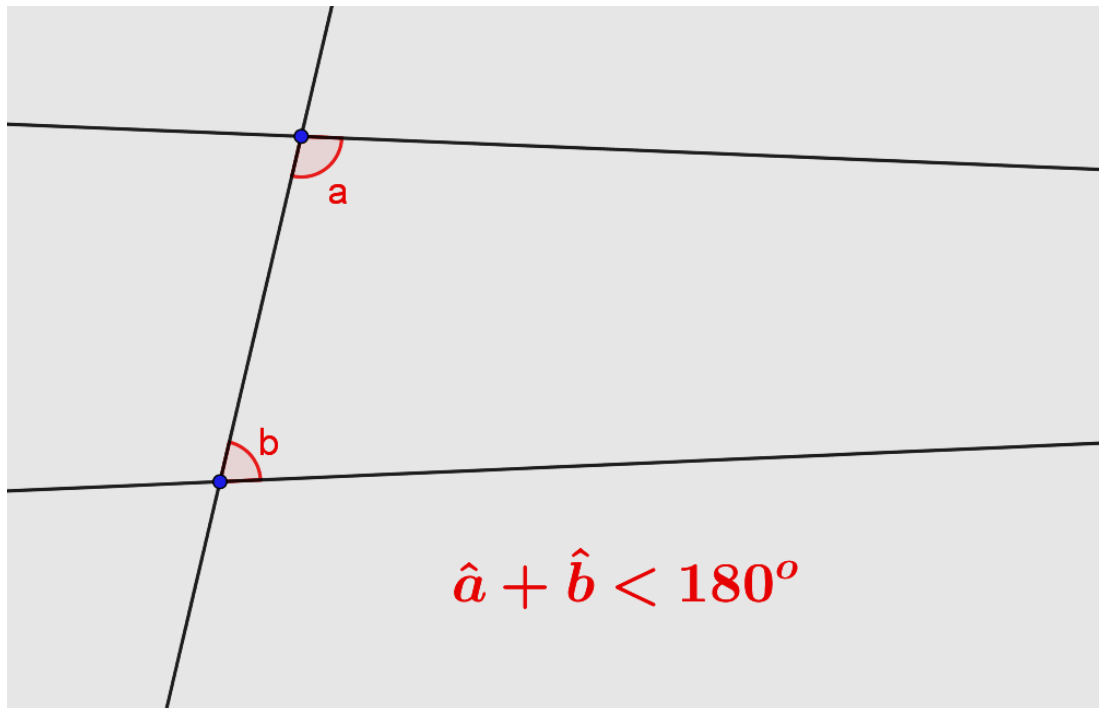
#### Το 5ο αξίωμα (Ευκλείδειο Αίτημα)

«Για κάθε δεδομένο σημείο που δεν βρίσκεται σε μια δεδομένη ευθεία, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία στο σημείο που δεν συναντά τη δεδομένη ευθεία (παράλληλη ευθεία)».



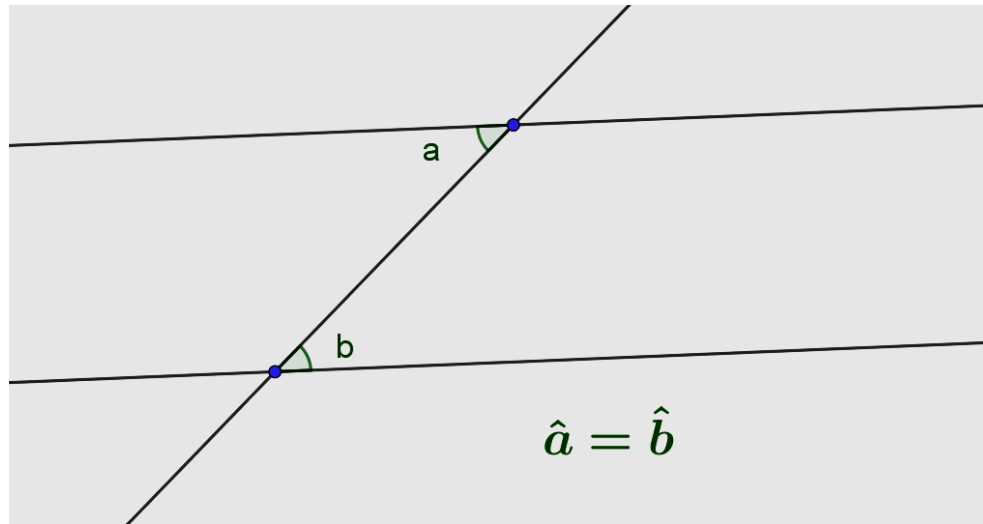
#### Ένα ισοδύναμο 5ο αξίωμα αντί του προηγούμενου

«Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες, τότε οι δύο ευθείες, τέμνονται σε εκείνο το ημιεπίπεδο στο οποίο οι γωνίες έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες»

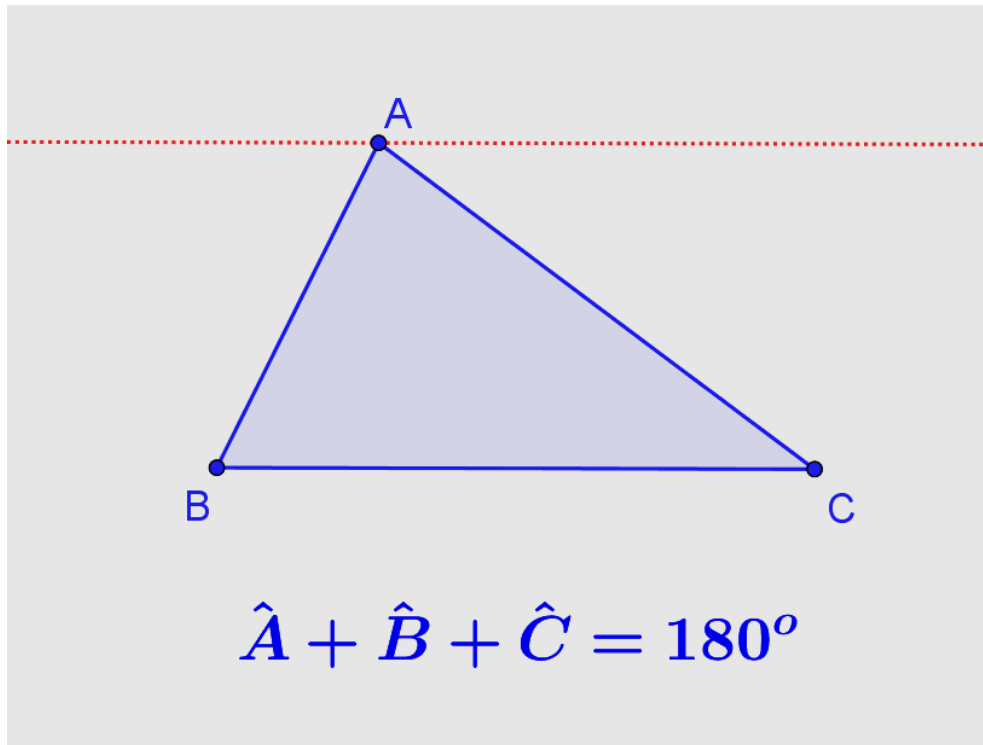


Τέλος, αποδεικνύουμε μερικά Θεωρήματα χρησιμοποιώντας το 5ο Αξίωμα τονίζοντας ξανά ότι αυτά είναι θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και όχι απαραίτητα και όλων των άλλων Γεωμετριών που έχουν κατασκευαστεί.

- «Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μια τρίτη γραμμή, τότε οι εσωτερικές εναλλασσόμενες γωνίες που σχηματίζονται θα είναι ίσες».



- «Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι  $180^\circ$ ».



## Έργα (και με πιθανές επεκτάσεις)

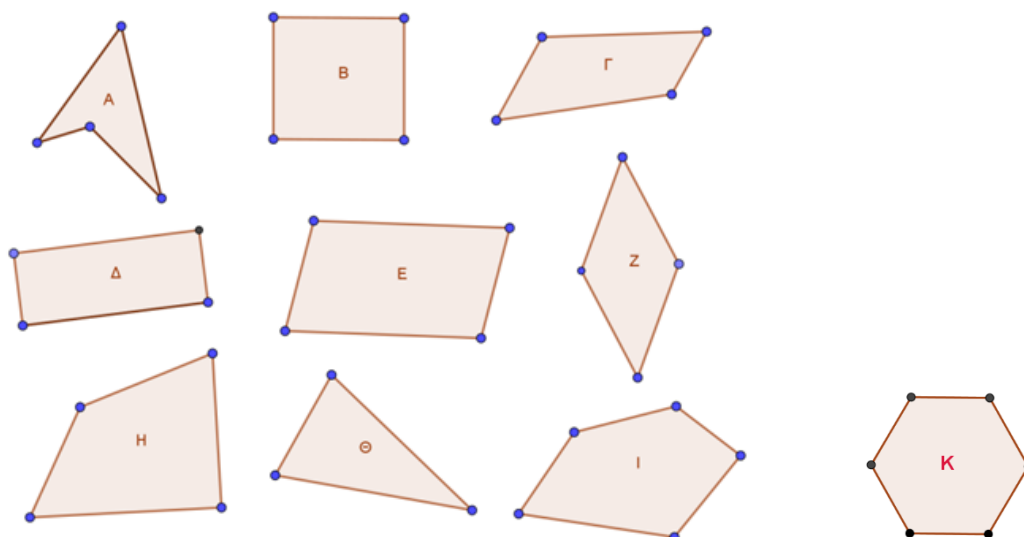
Σε κατάλληλο φύλλο εργασίας παρατίθενται:

- Έργα σχεδίασης παραλληλογράμμου που διατηρούν αναλλοίωτες τις ιδιότητές τους μετά από δυναμική μεταβολή των στοιχείων τους σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (Geogebra) και έργα σχεδίασης παραλληλογράμμων με κανόνα και διαβήτη.
- Έργα τα οποία απαιτούν δημιουργία εικασιών και τεκμηρίωση τους με απόδειξη.

Επιπλέον ο διδάσκων εφοδιάζει με το απαραίτητο χειραπτικό ή ψηφιακό υλικό την κάθε ομάδα ώστε να προσεγγίσει κάποιες από τις δραστηριότητες του φύλλου εργασίας με εναλλακτικούς τρόπους ώστε ταυτόχρονα να υπάρξει και η απαραίτητη διαφοροποίηση στη διδασκαλία για την κάλυψη των αναγκών του κάθε μαθητή.

### ΕΡΓΟ 1 (να απαντήσετε πάνω στις διακεκομμένες γραμμές)

1. Από τα παρακάτω σχήματα τρία διαφέρουν από τα υπόλοιπα ως προς το πλήθος των πλευρών τους.  
.....
2. Από τα παρακάτω τετράπλευρα ένα διαφέρει, δεν είναι ....., δηλαδή  
.....
3. Από τα παρακάτω κυρτά τετράπλευρα τα τέσσερα έχουν μια κοινή ιδιότητα:  
.....
4. **Ορισμός: Παραλληλόγραμμο** ονομάζεται το .....  
.....
5. Το σχήμα Γ είναι παραλληλόγραμμο;  
.....



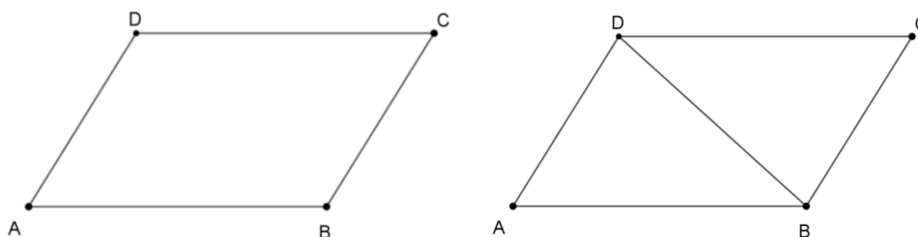
## ΕΡΓΟ 2: Αποδεικνύουμε τις ιδιότητες και τα κριτήρια παραλληλογράμμων

**Ορισμός:** «Ονομάζουμε παραλληλόγραμμο το τετράπλευρο του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες».

### Ιδιότητες παραλληλογράμμων

1. Οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.
2. Οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.
3. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται μεταξύ τους.

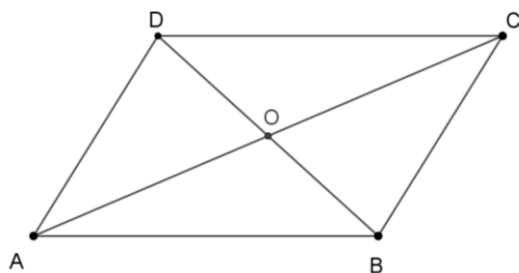
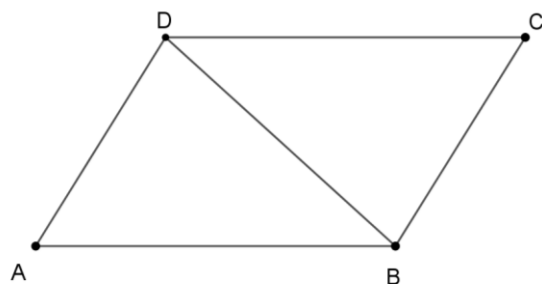
### Αποδείξεις



**Κριτήρια παραλληλογράμμων (Μέθοδοι για να αποδειχθεί ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο)**

1. Αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες τότε είναι παραλληλόγραμμο.
2. Αν ένα κυρτό τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες τότε είναι παραλληλόγραμμο.
3. Αν ένα κυρτό τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες τότε είναι παραλληλόγραμμο.
4. Αν ένα κυρτό τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες τότε είναι παραλληλόγραμμο.
5. Αν οι διαγώνιοι ενός κυρτού τετράπλευρου διχοτομούνται μεταξύ τους τότε είναι παραλληλόγραμμο.

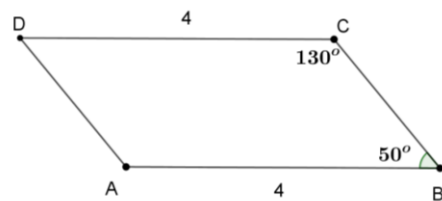
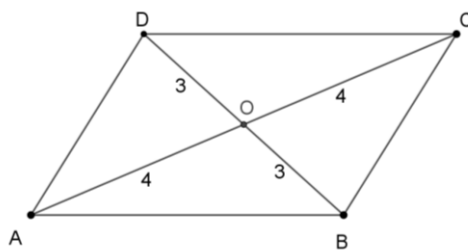
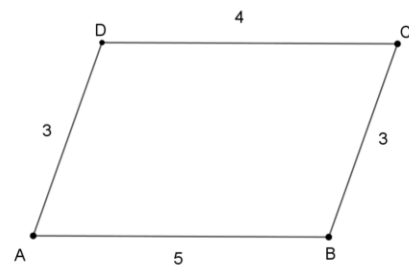
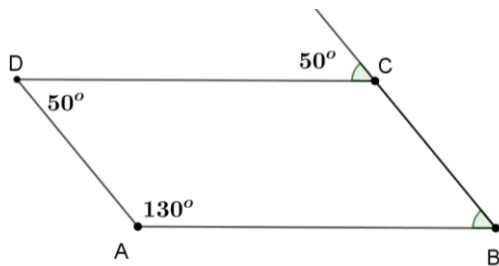
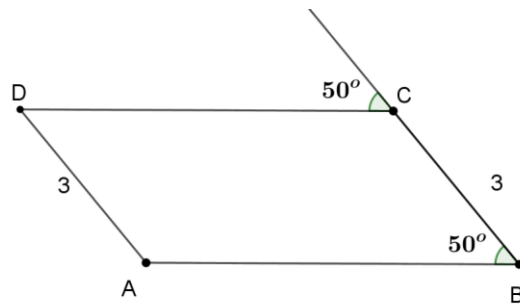
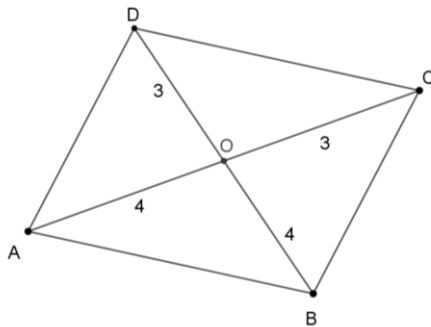
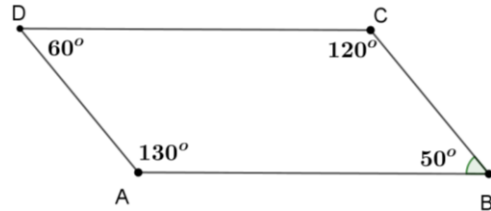
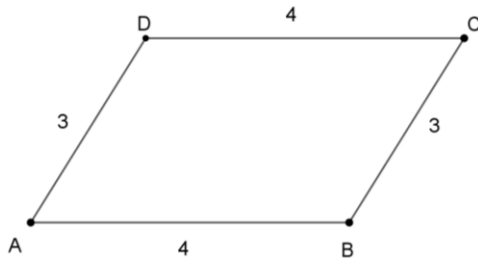
### Αποδείξεις



## 2<sup>η</sup> Διδακτική ώρα: Ορισμοί, Ιδιότητες, Κριτήρια

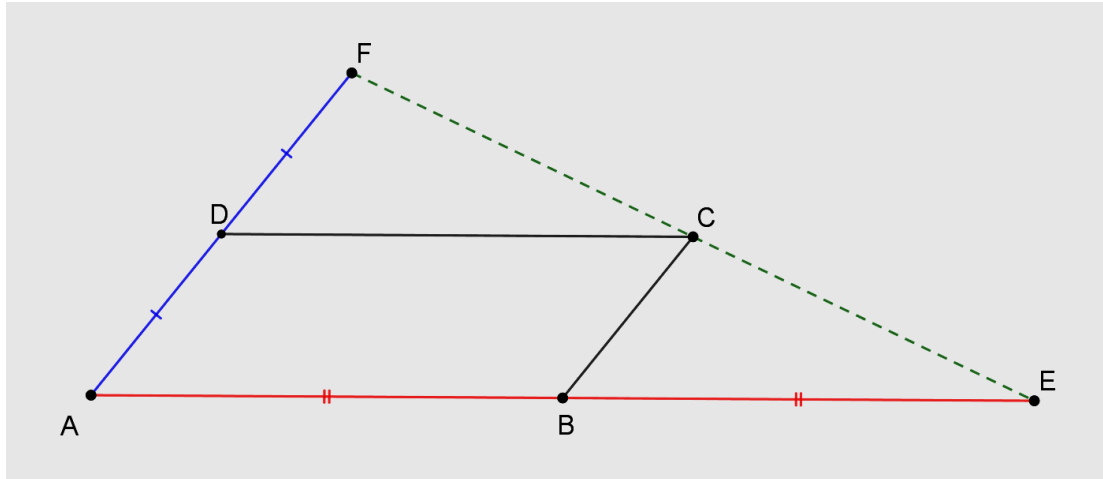
### ΕΡΓΟ 3

Ελέγξτε αν τα τετράπλευρα που ακολουθούν είναι παραλληλόγραμμα, αν όχι, ή αν δεν είμαστε σίγουροι αν είναι παραλληλόγραμμα ή όχι. Εξηγήστε τις απαντήσεις σας.



#### ΕΡΓΟ 4

Έστω ABCD ένα παραλληλόγραμμο και οι προεκτάσεις των πλευρών AB και AD έτσι ώστε  $BE=AB$  και  $DF=AD$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, C, F, βρίσκονται στην ίδια ευθεία χρησιμοποιώντας το 5ο Αξίωμα. Μπορείτε να βρείτε εναλλακτική απόδειξη; (Υπόδειξη: Με κατάλληλη βοηθητική γραμμή να δημιουργήσετε παραλληλόγραμμο)



#### ΕΡΓΟ 5

Με δεδομένα δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ σαν διαγώνιες κατασκευάστε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

**Πιθανές επεκτάσεις:** Η δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μετά και στη διδασκαλία των ειδικών παραλληλογράμμων διερευνώντας τις σχέσεις και τις θέσεις των διαγώνιων του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου.

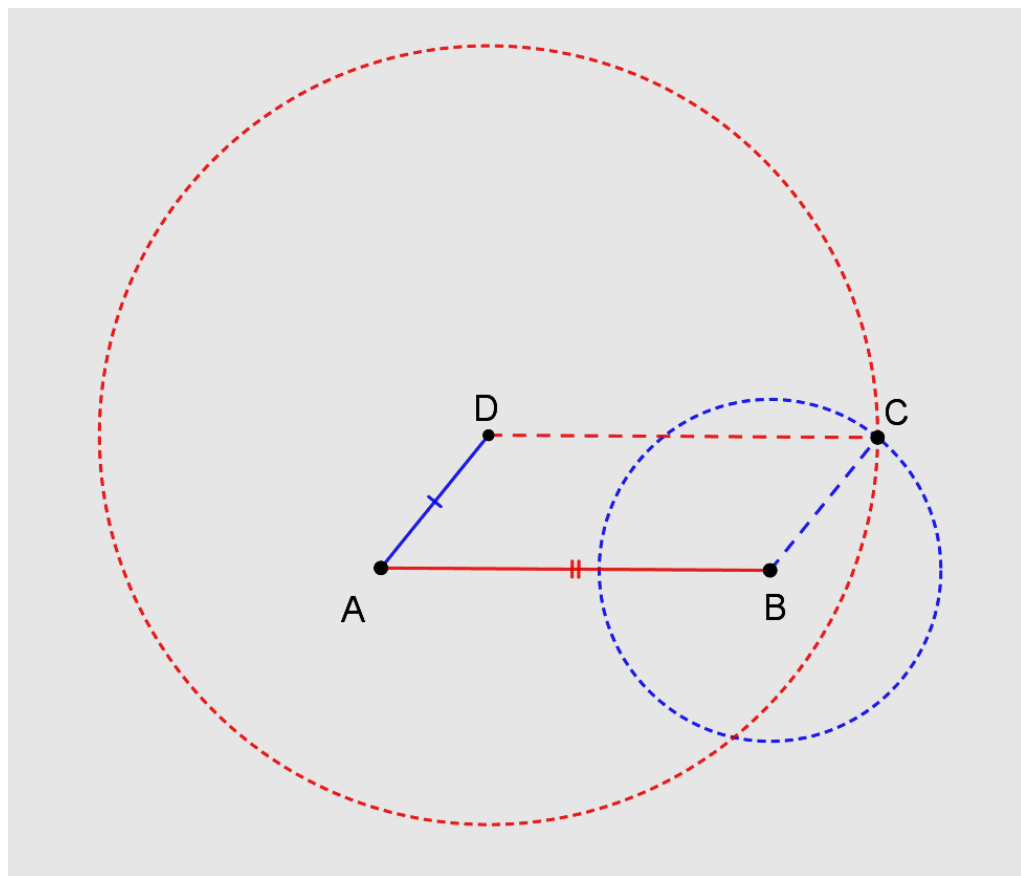


**ΕΡΓΟ 6: Δύο βασικές κατασκευές παραλληλογράμμων που χρησιμοποιούν μόνο τον κανόνα και τον διαβήτη. (Υπενθυμίζουμε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δέχεται μόνο αυτούς τους τύπους κατασκευών)**

Κατασκευή και με τη χρήση του Geogebra (Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας).

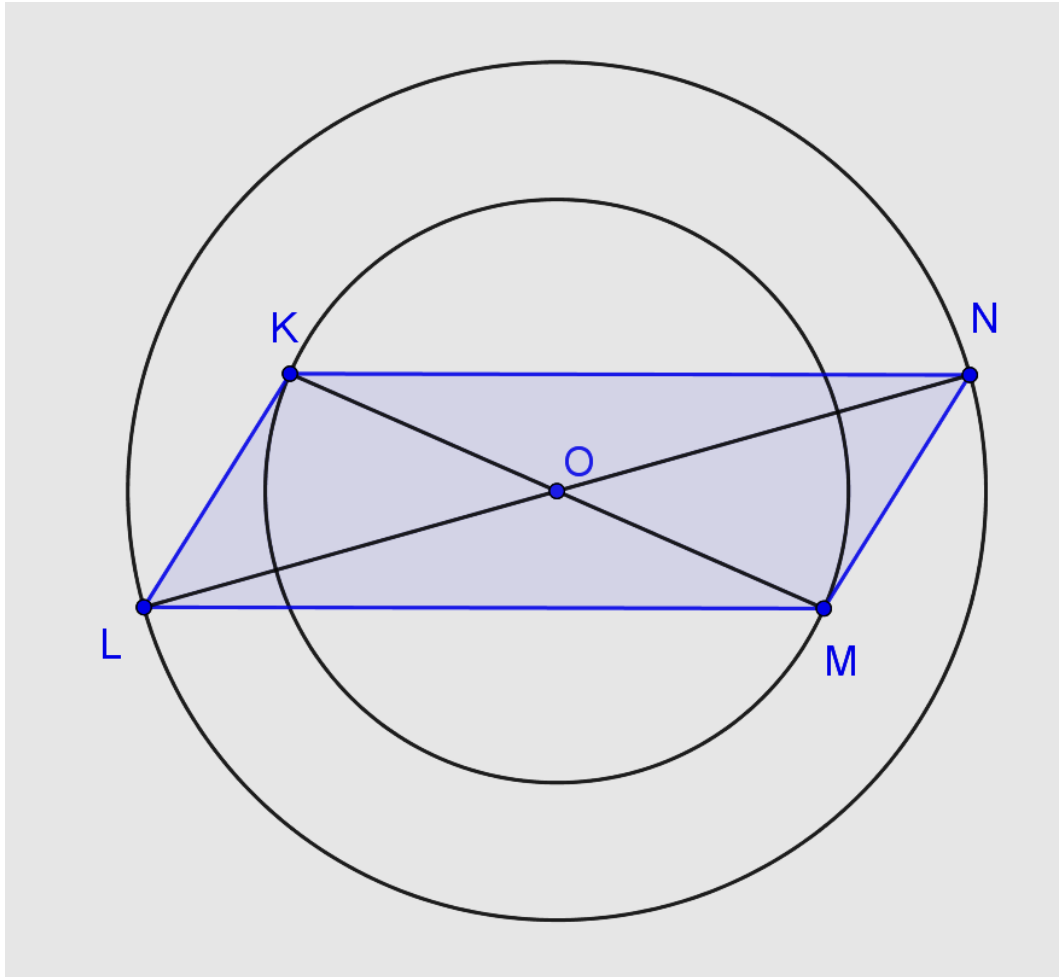
### **1η Κατασκευή**

- Κατασκευάστε δύο τμήματα AB και AD.
- Κατασκευάστε δύο κύκλους (κέντρο B, ακτίνα AD) και (κέντρο D, ακτίνα AB).
- Ονομάστε C το ένα σημείο τομής των κύκλων αυτών.
- Να αποδείξετε ότι το ABCD είναι παραλληλόγραμμο.



## 2η Κατασκευή

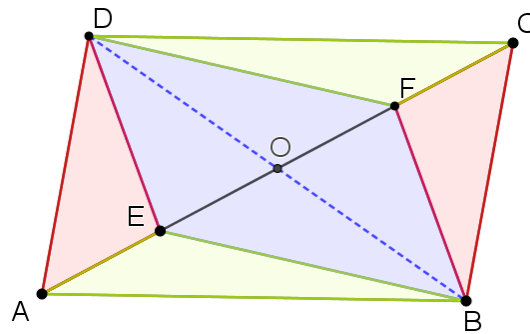
- Κατασκευάστε δύο κύκλους με το ίδιο κέντρο.
- Κατασκευάστε μια διάμετρο σε κάθε έναν από αυτούς τους κύκλους (όχι στην ίδια ευθεία.)
- Κατασκευάστε το κυρτό τετράπλευρο που ορίζεται από τα άκρα των διαμέτρων.
- Να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.



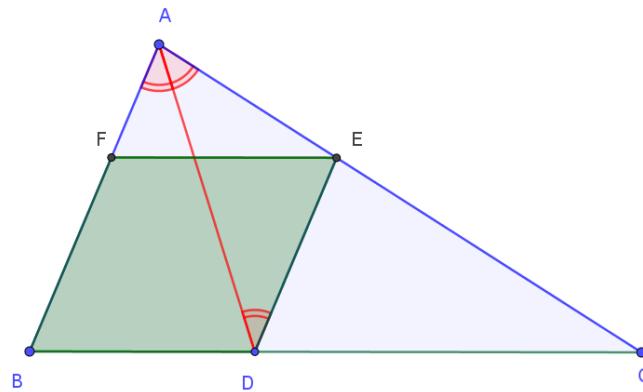
**Σχόλιο:** Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των βημάτων της κατασκευής ως εξής.

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα KM και βρείτε το μέσο του O, χρησιμοποιώντας την κατασκευή της μεσοκαθέτου τμήματος.
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο το O.
- Κατασκευάστε μια διάμετρο LN αυτού του κύκλου (όχι στην ίδια ευθεία με KM).
- Να αποδείξετε ότι το KLMN είναι παραλληλόγραμμο.

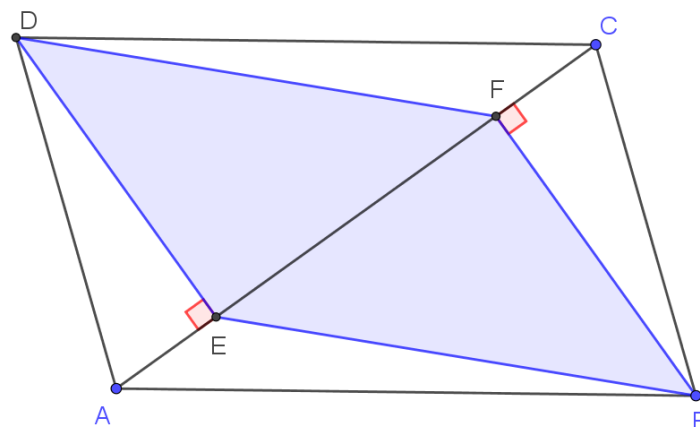
**ΕΡΓΟ 7:** Αν το ABCD είναι παραλληλόγραμμο και  $AE = FC$ , να αποδείξετε ότι και το DEBF είναι παραλληλόγραμμο.



**ΕΡΓΟ 8:** Αν AD διχοτόμος της γωνίας A, DE παράλληλη της AB και EF παράλληλη της BC, να αποδείξετε ότι οι γωνίες ABC και DEF είναι ίσες και  $AE = BF$ .



**ΕΡΓΟ 9:** Αν το ABCD είναι παραλληλόγραμμο και DE, BF κάθετες στην AC, να αποδείξετε ότι και το DEBF είναι παραλληλόγραμμο.

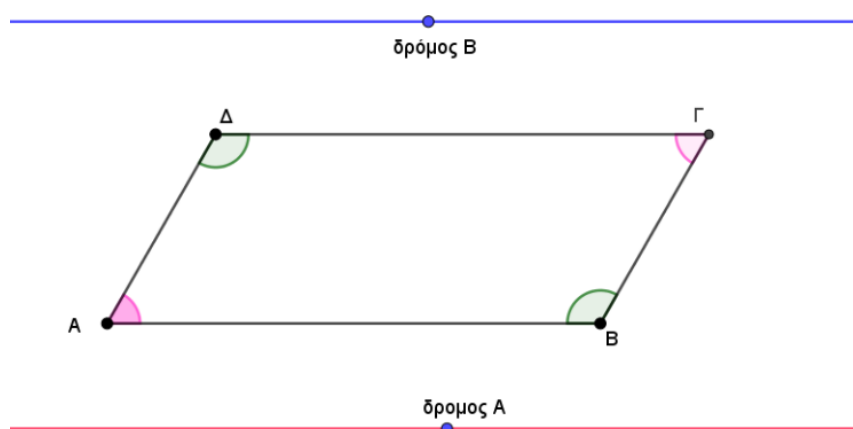


### 3<sup>η</sup> Διδακτική ώρα: Αξιολόγηση – Ανατροφοδότηση

#### ΕΡΓΟ 10

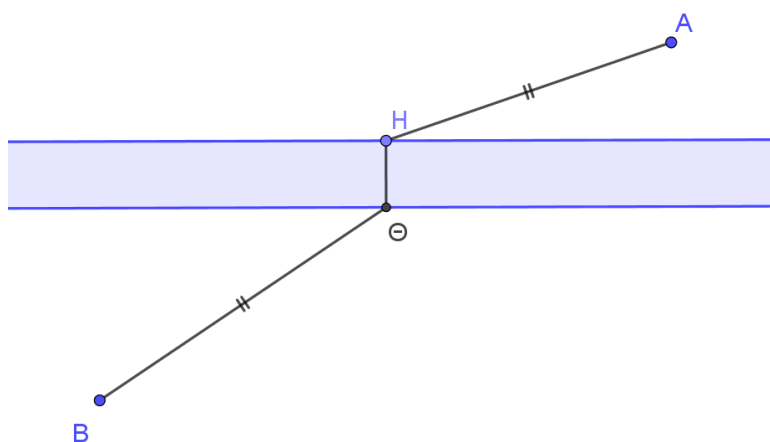
Δύο αδέρφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου όπως φαίνεται στο σχήμα. Βοηθήστε τα αδέρφια να χωρίσουν δίκαια το οικόπεδο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) Και τα δύο αδέρφια θέλουν να έχουν πρόσβαση και στους δύο δρόμους Α και Β.
- β) Ο ένας θέλει να έχει πρόσβαση μόνο στο δρόμο Α και ο άλλος μόνο στο δρόμο Β.
- γ) Ο ένας θέλει να έχει πρόσβαση μόνο στο δρόμο Α και ο άλλος μόνο στο δρόμο Β και ταυτόχρονα δεν θέλει κανείς από τους δύο να κτίσει στους πλαϊνούς δρόμους στην μεριά των οποίων συμφώνησαν να γίνουν κοινόχρηστοι χώροι.



#### ΕΡΓΟ 11

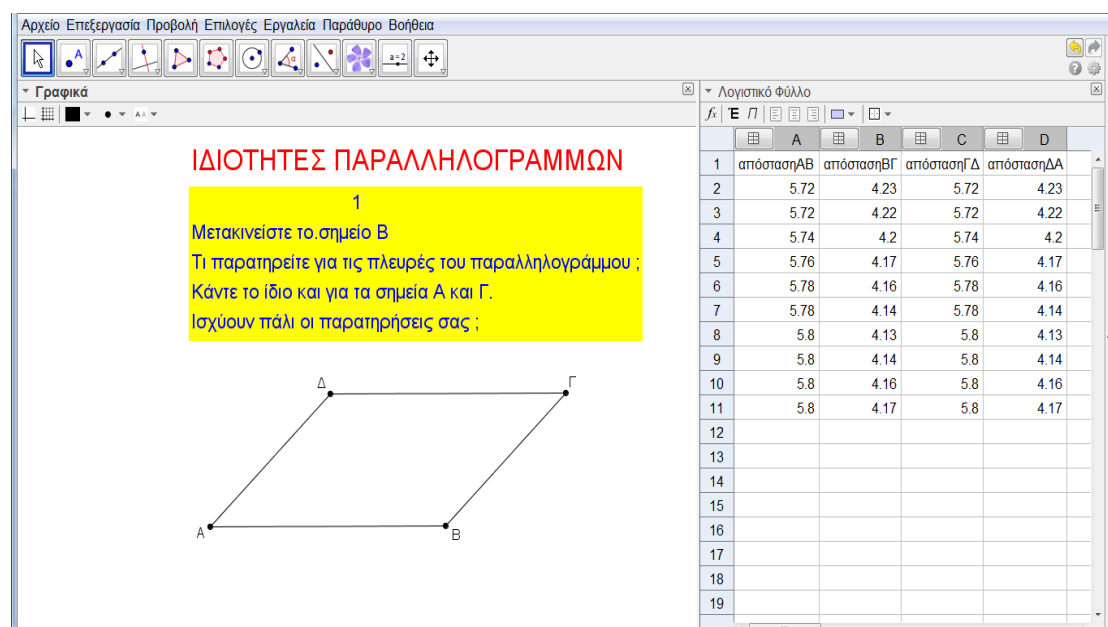
Στις απέναντι όχθες ενός ποταμού βρίσκονται τα σπίτια Α και Β όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η κοινότητα σχεδιάζει να κτίσει εκεί μια γέφυρα με την προϋπόθεση να συμβάλλουν οικονομικά και οι κάτοικοι των σπιτιών αυτών και η γέφυρα να απέχει την ίδια απόσταση από τα δύο σπίτια. Σε ποια θέση θα πρέπει να κατασκευάσει ο μηχανικός τη γέφυρα; Αιτιολογείστε τις επιλογές σας.



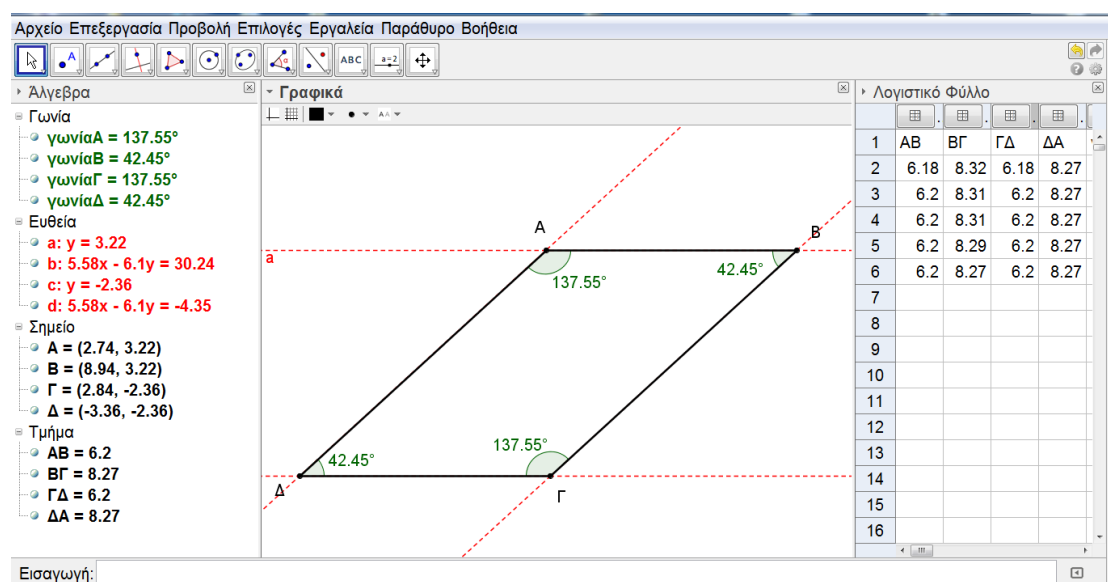
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Παράθεση εναλλακτικών έργων που μπορούν να αξιοποιηθούν στην τάξη)

- Για ανακάλυψη ιδιοτήτων παραλληλογράμμου και πιθανή επέκταση για ειδικά παραλληλόγραμμα.

### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 1 (χρήση λογιστικού φύλλου του λογισμικού)



### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 2 (χρήση λογιστικού φύλλου του λογισμικού και παραθύρου Άλγεβρας)

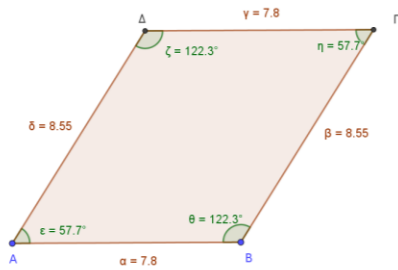
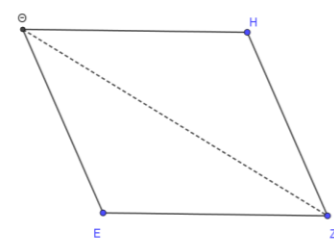


### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 3 (για ιδιότητες γωνιών και πλευρών παραλληλογράμμου και απόδειξη)

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ\_1A.ggb

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια

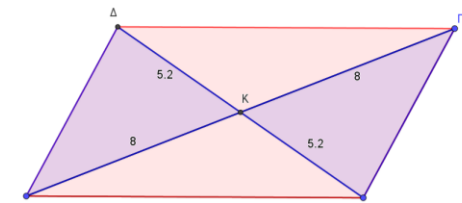
1. Να μετακινήσετε τις κορυφές Α και Β του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σε διάφορες θέσεις.
2. Να καταγράψετε τις σχέσεις που παρατηρήσατε όσον αφορά στις πλευρές και τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
3. Με τη βοήθεια του παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ να αποδείξετε τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων που παρατηρήσατε.

Εισαγωγή:

### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 4 (για μετρήσεις, εικασίες ιδιοτήτων και απόδειξη τους)

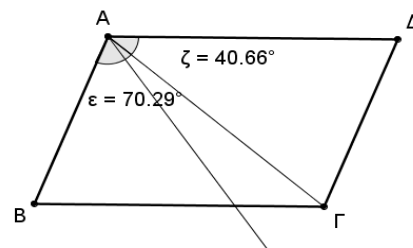
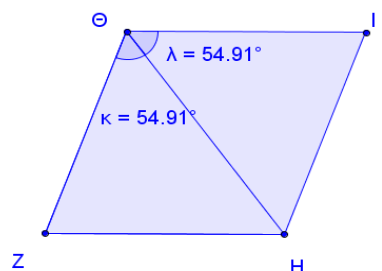
Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια



1. Να παρατηρήσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ.
2. Να μετακινήσετε τα σημεία Α, Β, Γ και να ελέγξετε αν οι παρατηρήσεις σας ισχύουν ακόμη.
3. Διατυπώστε το συμπέρασμα που βγάλατε.
4. Να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας με τη βοήθεια του σχήματος.

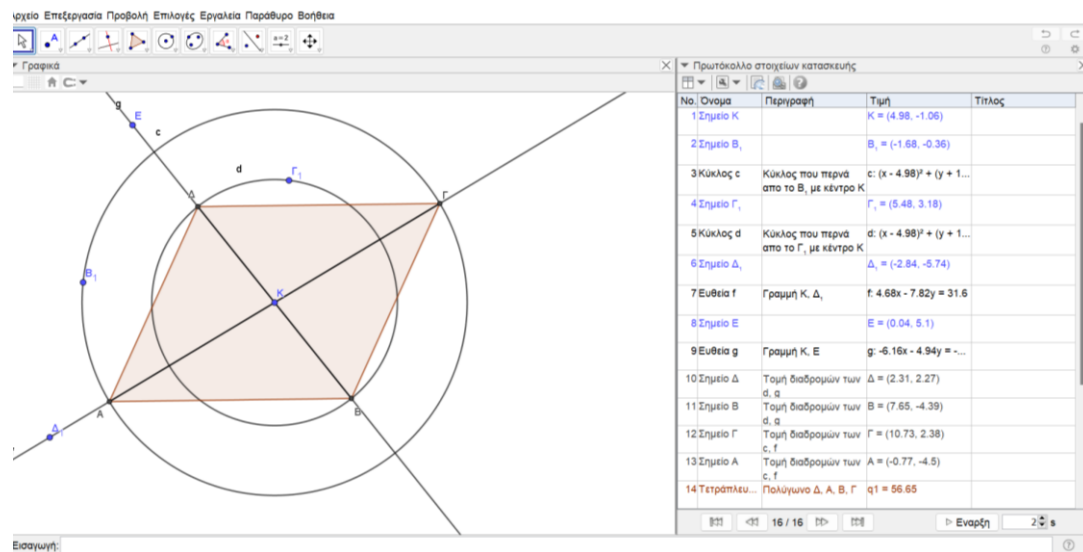
### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 5 (για άρση λανθασμένης αντίληψης ότι η διαγώνιος είναι σίγουρα και διχοτόμος της γωνίας του)

Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Επιλογές Εργαλεία Παράθυρο Βοήθεια

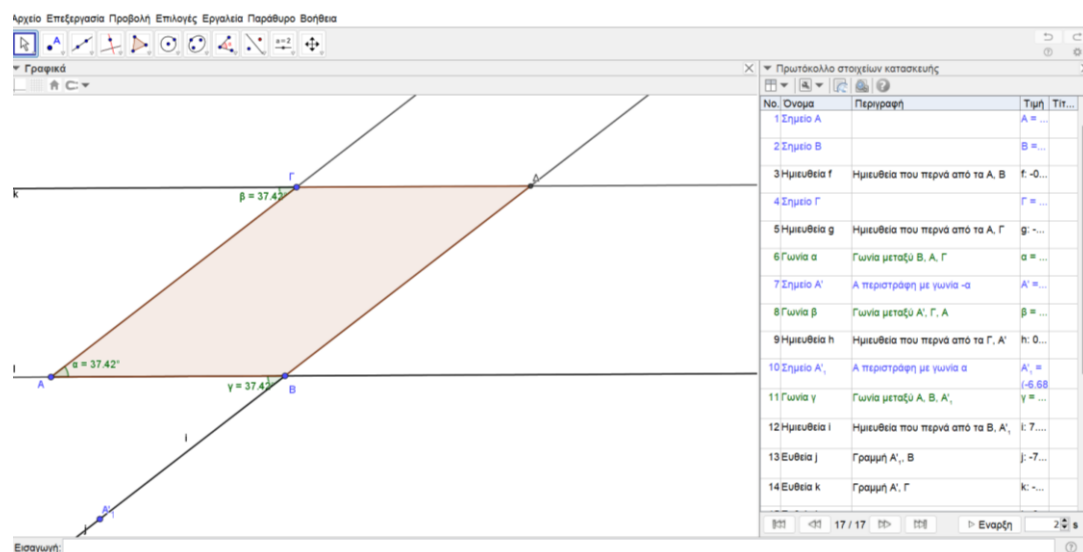



- Κατασκευές παραλληλογράμμων με βάση τα κριτήρια

## ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 1 (χρήση πρωτοκόλλου στοιχείων κατασκευής)

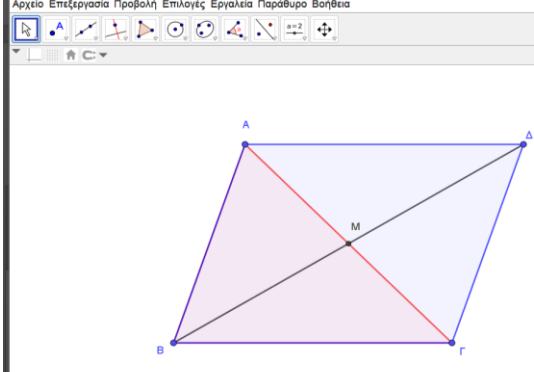


## ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 2 (χρήση πρωτοκόλλου στοιχείων κατασκευής)



## Επέκταση και για ειδικά παραλληλόγραμμα, με ή χωρίς χρήση Geogebra.

### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 1

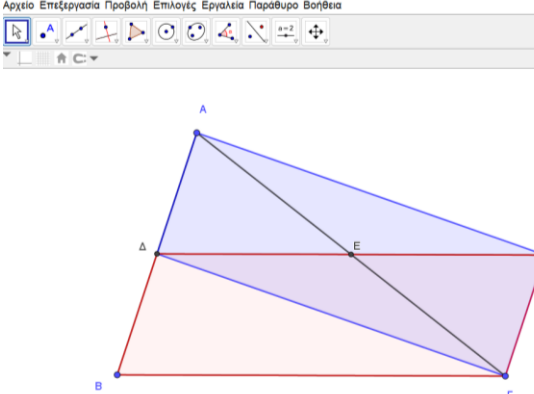


ΥΠΟΘΕΣΗ  
BM διάμεσος του τριγώνου ABΓ  
Προέκταση  $MD=BM$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ  
ABΓΔ παραλληλόγραμμα

ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΩΤΗΣΗ  
Προσδιορίστε συνθήκες για το τρίγωνο ABΓ ώστε το ABΓΔ να είναι:  
1. Ορθογώνιο  
2. Ρόμβος  
3. Τετράγωνο

### ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΟ 2



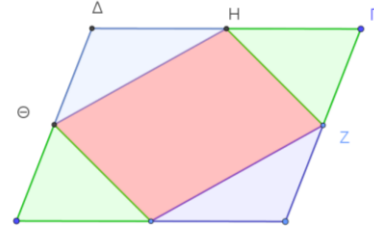
ΥΠΟΘΕΣΗ  
Δ, Ε μέσα των πλευρών AB, AG του τριγώνου ABΓ  
Ζ συμμετρικό του Δ ως προς κέντρο συμμετρίας Ε

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ  
1. ΑΔΓΖ παραλληλόγραμμα  
2. ΒΓΖΔ παραλληλόγραμμα

ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ  
Τι συμπεραίνετε για το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ;

### ΕΡΓΟ

Έστω παραλληλόγραμμα ABΓΔ και Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών του AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμα.



ΥΠΟΘΕΣΗ  
ABΓΔ παραλληλόγραμμα  
Ε, Ζ, Η, Θ μέσα των AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ  
ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμα

**Πιθανές επεκτάσεις:** Το έργο αυτό μπορεί να επεκταθεί και στην ενότητα «Ειδικά παραλληλόγραμμα» και «Εφαρμογές Παραλληλογράμμων» και να γενικευτεί σε τυχαίο τετράπλευρο ABΓΔ (Θεώρημα παραλληλογράμμου, Pierre Varignon).